Математический праздник. 6 класс.

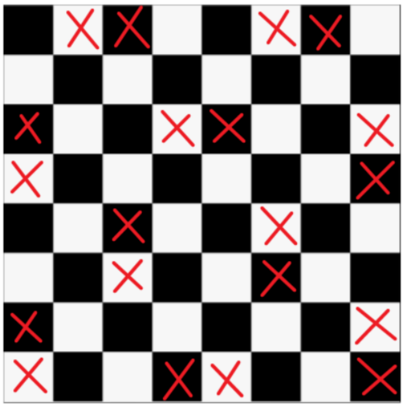
1. Марья Ивановна сопровождала детей 6 класса на математический праздник. Для подготовки и проведения инструктажа, она попросила зайти их в кабинет №1. Марья Ивановна заметила, что если за каждый стол сядет 7 учеников, то для одного ученика не хватит места. Если же за каждый стол сядет по 8 человек, то один стол окажется свободным. Сколько детей сопровождала Марья Ивановна и сколько столов было в кабинете №1.

Решение: пусть x - количество столов, тогда количество учеников в первом случае $7x+1$, а во втором случае $8(x-1)$. Составим уравнение: $7x+1=8(x-1)$. Откуда получаем, что $x=9$. Детей 64, столов 9.

2. На шахматной доске 8х8 отметьте 20 клеток так, чтобы любая клетка (и отмеченная, и неотмеченная) соседствовала по стороне хотя бы с одной отмеченной клеткой.

Решение:

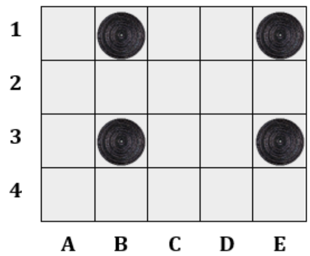
Например,



3. Чтобы успешно сдать ВПР по английскому языку Матвею нужно повторить весь ранее пройденный материал. В первый день он повторил 30% всего материала, во второй день - 45% оставшегося материала. Сколько процентов материала Матвей повторил за второй день? Сколько процентов материала осталось повторить?

Решение: весь изученный материал это x, тогда в первый день он изучил $0{,}3x$, осталось $0{,}7x$, во второй день он изучил $0{,}7x * 0{,}45 = 0{,}315x$, откуда получаем, что во второй день он изучил 31,5% от всего количества, и осталось изучить 38,5%.

4. На доске 4х5 стоят 4 черные шашки. Расположение будем считать «удачным», если шашки образуют прямоугольник (например, как показано на рисунке):
- шашки должны быть вершинами прямоугольника;
- стороны прямоугольника должны быть параллельны сторонам доски.
Сколько существует различных удачных расположений?



Решение: Шашки занимают 2 столбца и 2 строчки.

Выбрать 2 столбца из 5 можно 10-ю способами ($C_5^2 = \frac{5!}{3!2!} = 10$).

Выбрать 2 строчки из 4 можно 6-ю способами ($C_4^2 = \frac{4!}{2!2!} = 6$).
Всего 6*10 = 60 способов.

Ответ: 60 способов

5. Замените в равенстве БУКЕТ = АСТРА + АСТРА + АСТРА + ... + АСТРА одинаковые буквы одинаковыми цифрами, а разные — разными так, чтобы равенство было верным, а количество цветов в букете было бы наибольшим из возможных.

Ответ. Максимальное количество «цветов» равно семи, например, БУКЕТ = 96047, АСТРА = 13721.

Решение. Пример для семи «цветов» приведён выше. Покажем, что больше семи «цветков» быть не может. Для этого удобно условие переписать как пример на умножение БУКЕТ = АСТРА $\cdot$ n, где n — количество «цветов». Понятно, что если «цветков» 10 или больше, то правая часть превысит 100000, так что решений не будет. Невозможно решение и для девяти «цветков». Для того чтобы число БУКЕТ = АСТРА $\cdot$ 9 было пятизначным, надо, чтобы А равнялось 1. Но тогда БУКЕТ и начинается, и кончается на девятку, а этого быть не должно. Теперь докажем, что и восьми «цветков» быть не может. Пусть АСТРА $\cdot$ 8 = БУКЕТ. Так как в слове БУКЕТ все цифры разные, то БУКЕТ ≤ 98765, а тогда АСТРА $\leq \frac{98765}{8} = 12345{,}675$, то есть АСТРА ≤ 12345.

Тогда понятно, что А = 1 и Т = 8. Буква Е обозначает цифру, произведение которой на 8 оканчивается на неё же. Легко убедиться, что это может быть только ноль. Поскольку цифры 0 и 1 уже заняты, а С $\leq$ 2 и Т = 8, то С = 2. Итак, есть только одна возможность: АСТРА = 12801. Но это число не подходит, так как 12801 $\cdot$ 8 = 98408, а в 102408, это шестизначное число.

6. 28 малышей из Солнечного города весом 2, 3, 4 и 5 кг (по 7 малышей каждого веса) переправлялись на лодке, выдерживающей 10 кг, через речную протоку. Каждую переправу какой-то малыш был капитан, но никакой малыш не был капитаном более двух раз. Докажите, что капитанами побывали не менее 13 малышей.

Решение:

Заметим, что малыши, которые были капитанами на обратных рейсах, поедут на другой берег повторно. Суммарный вес всех малышей равен 7*(2+3+4+5) или 98 кг. Следовательно, поскольку лодка выдерживает всего 10 кг, то рейсов туда было минимум 10, то есть рейсов обратно было минимум 9, и каждый раз минимум один малыш весом 2 кг возвращался обратно. Следовательно, вес, который лодка перевезла на другой берег не меньше, чем 98 + 2 *9 или 116, поэтому рейсов туда было не меньше, чем 12. Заметим, что тогда капитанов было не меньше, чем 12. Предположим их было ровно 12. Пускай нашелся малыш, который два раза был капитаном на обратном рейсе. Тогда либо нашелся малыш, проехавший два раза капитаном туда, либо у нас уже нашлось 13 капитанов. Пускай нашелся малыш, проехавший два раза капитаном туда, следовательно, он хотя бы раз проехал пассажиром на обратном рейсе. Тогда суммарный вес, который лодка перевезла туда минимум 98 + 2*11(капитаны обратных рейсов) + 2(наш пассажир обратного рейса) = 122 >120. То есть было минимум 13 рейсов туда, а, следовательно, и капитанов было минимум 13, поскольку тогда рейсов туда и обратно в сумме будет не меньше, чем 25, что больше, чем 12*2.
Пускай не нашлось малыша, бывшего капитаном на обратных рейсах дважды. Тогда суммарный вес, который лодка перевезет на другой берег, учитывая тех, кто ездит туда дважды, будет не меньше, чем 98 + 2*7+3*4 или 124, что больше, чем 120, значит было минимум 13 рейсов туда и 12 обратно, что больше чем 24 рейса, а, следовательно, минимум 13 малышей были капитанами.