

## 6 класс.

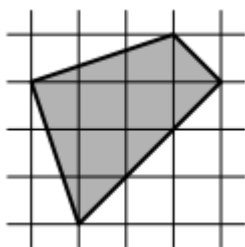
1. Можно ли к числу 2023 приписать слева и справа одну и ту же цифру, чтобы получившееся число делилось на 6? А на 18?

**Ответ:** 420234, нет

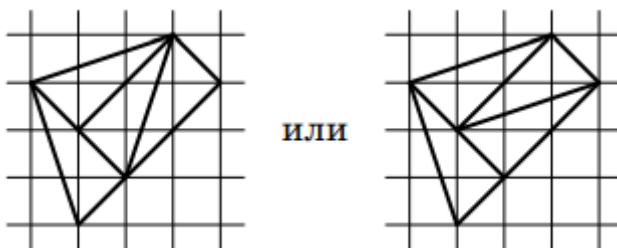
**Решение:** Чтобы число делилось на 6, нужно, чтобы оно делилось на 2 и на 3. Значит, последняя цифра должна быть чётной, и сумма цифр должна делиться на 3. Сумма цифр числа 2023 равна 7. Ближайшее число, делящееся на 3 - это 9. Значит, приписывая по 1 (добавляя к сумме цифр 2), мы получим число, делящееся на 3. Делимость на 3 сохранится при увеличении приписываемой цифры на 3. Т.е. приписать можно 1, 4 или 7. Но цифра эта должна быть четной. Поэтому решение только одно: 420234.

Рассуждая аналогично, увидим, что приписывание 1 даст нам число, кратное 9, но не делящееся на 2. Увеличивать же приписываемую цифру с сохранением делимости на 9, нужно на 9, но это невозможно. Поэтому, ответ: нет.

2. Разрежьте фигуру, показанную на рисунке, на четыре одинаковые части.



**Решение.** См. рисунок.



3. Дядя Федор, Кот Матроскин и Шарик отправились искать клад. Ребята нашли сундук, в котором 9750 золотых монет (монеты пронумерованы от 1 до 9750). Но забрать можно те монеты, номера которых делятся либо на 3, либо на 5, но не делятся на 13. Сколько монет смогут забрать ребята?

**Решение:**

Нарисуем круги Эйлера и начнем их заполнять.

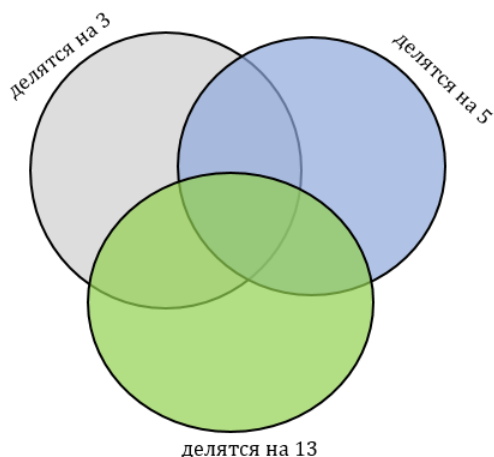
Давайте найдем множества чисел, которые нам понадобятся по условию задачи.

Множество чисел, делящихся на 3 – 3250 чисел;

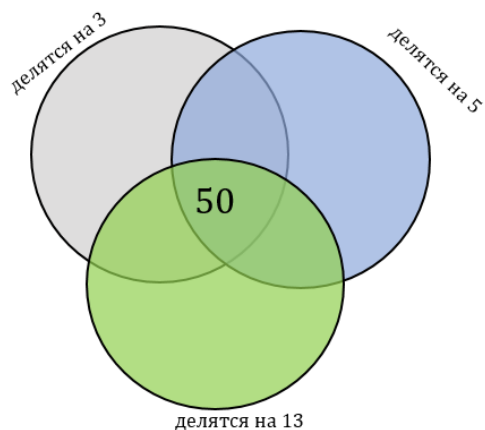
Множество чисел, делящихся на 5 – 1950 чисел;

Множество чисел, делящихся на 13 – 750 чисел.

Получили:



Нам нужно в первую очередь заполнить место, где пересекаются все три множества. Туда входят числа, которые делятся на 3, 5, 13 – всего их 50.

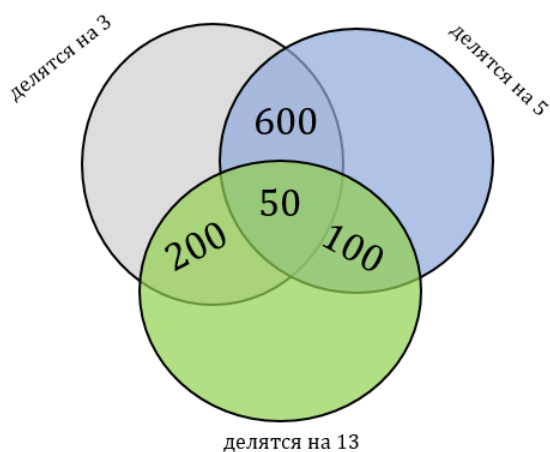


Теперь заполним места попарного пересечения множеств:

600 чисел делятся на 3 и 5, но не делятся на 13;

200 чисел делятся на 3 и 13, но не делятся на 5;

100 чисел делятся на 3 и 13, но не делятся на 3.

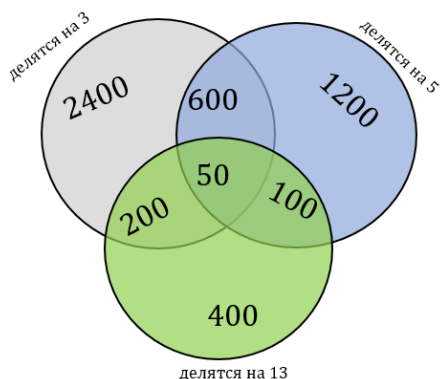


Осталось заполнить только множества чисел, которые делятся на какое-то одно число:

2400 чисел делятся только на 3;

1200 чисел делятся только на 5;

400 чисел делятся только на 13.



Получаем, что  $2400 + 600 + 1200 = 4200$  монет смогут забрать Дядя Федор, Кот Матроскин и Шарик.

4. Тимур очень любит решать ребусы и загадал один своему другу Баиру. Для этого он на доске записал разность чисел 2023 и 12, затем попросил Баира найти такие 4 числа, состоящие из двух различных цифр, которые дают в сумме число, записанное на доске.

**Решение:**

*Первый способ.*  $2012 = 503 + 503 + 503 + 503$ . Заменяв ноль пятёркой, мы увеличим сумму на 200; для компенсации заменим одну из пятёрок в разряде сотен на тройку:  $2012 = 353 + 553 + 553 + 553$ .

*Второй способ.* Попробуем найти два числа, записывающихся двумя цифрами и в сумме дающих  $2012 : 2 = 1006$ . Из разряда десятков должен происходить перенос, поэтому сумма цифр в разряде сотен без этого переноса должна равняться 9. Значит, в этом разряде присутствуют обе неизвестные цифры, и их сумма равна 9. С другой стороны, сумма цифр в разряде единиц оканчивается на 6. Поэтому либо эта сумма равна 6 и получена как  $3 + 3$  при второй цифре 6 (но тогда мы не сможем получить сумму 10 в разряде десятков), либо равна 16 и получена как  $8 + 8$  при второй цифре 1. Отсюда получаем представления  $1006 = 118 + 888 = 188 + 818$ ;  $2012 = 118 + 888 + 118 + 888 = 188 + 818 + 188 + 818 = 118 + 888 + 188 + 818$ .

5. Семь команд приняли участие в футбольном турнире. Каждая команда сыграла с каждой один раз. За победу можно было получить – 3 балла, за ничью – 1 балл, за проигрыш – 0 баллов.

Про команды известны следующие утверждения:

1. Команда Б ни разу не проиграла
2. Команда В выиграла нечетное количество матчей
3. Команда Г выиграла столько же, сколько и проиграла
4. Команда Д ни разу не выиграла и не проиграла

Все команды набрали разное количество очков.

место		А	Б	В	Г	Д	Е	Ж	Сумма
1м	А	■							
2м	Б		■						
3м	В			■					
4м	Г				■				
5м	Д					■			
6м	Е						■		
7м	Ж							■	

Восстановите результат турнира.

**Решение:**

Известно, что команда Д ни разу не выиграла и не проиграла, значит, все партии были ничейные. Команда Ж получила 1 балл, сыграв с Д, остальные партии были проигрышными.

место		А	Б	В	Г	Д	Е	Ж	Сумма
1м	А	■	1		3	1		3	
2м	Б	1	■			1		3	
3м	В			■	3	1		3	
4м	Г	0		0	■	1		3	
5м	Д	1	1	1	1	■	1	1	6
6м	Е					1	■	3	
7м	Ж	0	0	0	0	1	0	■	1

Команда Г не могла выиграть у Б, но проиграть тоже не могла (иначе поражений окажется больше побед), значит Г и Б сыграли в ничью. Так как у Г побед и поражений одинаково, то Г должна выиграть у Е.

место		А	Б	В	Г	Д	Е	Ж	Сумма
1м	А	■	1		3	1		3	
2м	Б	1	■		1	1		3	
3м	В			■	3	1		3	
4м	Г	0	1	0	■	1	3	3	8
5м	Д	1	1	1	1	■	1	1	6
6м	Е				0	1	■	3	
7м	Ж	0	0	0	0	1	0	■	1

Команда В выиграла 3 партии. С командой Б могла сыграть в ничью либо проиграть, а значит, команда В может получить: от 10 до 12 баллов.

Команде Б осталось сыграть еще 2 партии с В и Е. Обе партии не могут быть ничейными (сумма баллов станет 8). Если одна партия окажется ничейной, тогда Б наберет 10 баллов, что, тоже невозможно. Значит, Б обе партии выиграла и набрала 12 баллов.

место		А	Б	В	Г	Д	Е	Ж	Сумма
1м	А	■	1		3	1		3	
2м	Б	1	■	3	1	1	3	3	12
3м	В		0	■	3	1		3	
4м	Г	0	1	0	■	1	3	3	8
5м	Д	1	1	1	1	■	1	1	6
6м	Е		0		0	1	■	3	
7м	Ж	0	0	0	0	1	0	■	1

Чтобы А заняла 1 место, нужно набрать больше 12 баллов, а это возможно только при выигрыше у команд В и Е.

место		А	Б	В	Г	Д	Е	Ж	Сумма
1м	А	■	1	3	3	1	3	3	14
2м	Б	1	■	3	1	1	3	3	12
3м	В	0	0	■	3	1		3	
4м	Г	0	1	0	■	1	3	3	8
5м	Д	1	1	1	1	■	1	1	6
6м	Е	0	0		0	1	■	3	
7м	Ж	0	0	0	0	1	0	■	1

Так как команда В выиграла нечетное количество раз, то партия с Е тоже – выигрышная.

Тогда, мы получаем итоговую таблицу:

место		А	Б	В	Г	Д	Е	Ж	Сумма
1м	А	■	1	3	3	1	3	3	14
2м	Б	1	■	3	1	1	3	3	12
3м	В	0	0	■	3	1	3	3	10
4м	Г	0	1	0	■	1	3	3	8
5м	Д	1	1	1	1	■	1	1	6
6м	Е	0	0	0	0	1	■	3	4
7м	Ж	0	0	0	0	1	0	■	1

6. Кеша написал слово «ОЛИМПИАДА» и все его циклические сдвиги (перестановки по кругу), получив таблицу 1. Затем, упорядочив эти "слова" по алфавиту, он составил таблицу 2 и выписал её последний столбец: «ИДАПЛОИАМ».

Таблица 1
ОЛИМПИАДА
АОЛИМПИАД
ДАОЛИМПИА
АДАОЛИМПИ
ИАДАОЛИМП
ПИАДАОЛИМ
МПИАДАОЛИ
ИМПИАДАОЛ
ЛИМПИАДАО

Таблица 2
АДАОЛИМПИ
АОЛИМПИАД
ДАОЛИМПИА
ИАДАОЛИМП
ИМПИАДАОЛ
ЛИМПИАДАО
МПИАДАОЛИ
ОЛИМПИАДА
ПИАДАОЛИМ

Саша сделал тоже самое с целой фразой и у него получилось следующее: «ШРЬАЕТ ЗДАЧИА ЛОКСНСА». Расшифруйте фразу Саши.

**Решение:** Мы будем постепенно восстанавливать Сашину вторую таблицу, для каждого слова по очереди.

Заметим сначала, что каждая буква встречается в каждом столбце столько же раз, сколько раз она встречается в слове. Поэтому буквы Сашиного первого слова — ШРЬАЕТ. Так как слова в таблице упорядочены по алфавиту, то в первом столбце эти буквы стоят в алфавитном порядке: АЕРТШЬ (табл. 1).

Таблица 1					
А					Ш
Е					Р
Р					Ь
Т					А
Ш					Е
Ь					Т

Таблица 1					
А	Т				Ш
Е	Ш				Р
Р	Е				Ь
Т	Ь				А
Ш	А				Е
Ь	Р				Т

Пусть теперь некоторая буква стоит в последнем столбце таблицы 1. Тогда в слове после неё будет идти буква, стоящая первой в этой строке. (При этом мы считаем, что после последней буквы идёт первая.) Из первой строки табл. 1 видно, что после буквы Ш идёт буква А, из второй — что после буквы Р идёт Е, и т. д.

Воспользовавшись этим, мы можем заполнить и второй столбец (табл. 2). Из получившейся таблицы видно, что после пары букв МА идёт буква К (первая строчка), после пары ТА идёт М (вторая строчка), и т. д.

Можно, пользуясь этой информацией, заполнить третий столбец, потом четвёртый и т. д., пока не заполнится вся таблица:

Таблица 1					
А	Т	Ь	Р	Е	Ш
Е	Ш	А	Т	Ь	Р
Р	Е	Ш	А	Т	Ь
Т	Ь	Р	Е	Ш	А
Ш	А	Т	Ь	Р	Е
Ь	Р	Е	Ш	А	Т

Нашли первое слово «РЕШАТЬ»

Аналогично построим таблицу для второго слова «ЗАДАЧА»

Таблица					
А	Д	А	Ч	И	З
А	Ч	И	З	А	Д
Д	А	Ч	И	З	А
И	З	А	Д	А	Ч

З	А	Д	А	Ч	И
Ч	И	З	А	Д	А

Получили слово «ЗАДАЧИ»

Осталось последнее слово: «ЛОКСНСА»

Таблица						
А	С	С	Н	О	К	Л
К	Л	А	С	С	Н	О
Л	А	С	С	Н	О	К
Н	О	К	Л	А	С	С
О	К	Л	А	С	С	Н
С	Н	О	К	Л	А	С
С	С	Н	О	К	Л	А

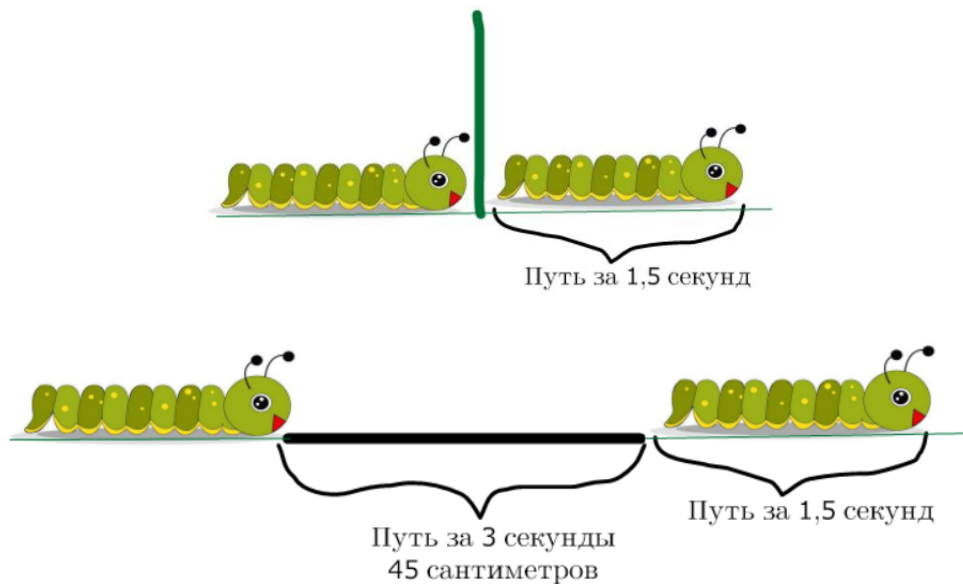
Получили слово «КЛАССНО».

И можем собрать всю фразу: «РЕШАТЬ ЗАДАЧИ КЛАССНО».

7. Гусеница проползает лежащую соломинку длиной 45 см за 4,5 секунд, а мимо стоящей травинки за 1,5 секунд. Вычислите длину гусеницы и ее скорость.

**Решение:**

Гусеница проползает расстояние, равное своей длине за 1,5 секунд (см рисунок сверху), а расстояние большее на 45 см – за 4,5 секунд (см рисунок снизу). Следовательно, 45 см «голова» гусеницы проходит за 3 секунды, т.е. сама гусеница в два раза короче соломинки, а скорость гусеницы равна  $22,5 / 1,5 = 15$  см/с.



Ответ: длина гусеницы 22,5 см, скорость гусеницы 15 см/с.